Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Физико- математический лицей»

г. Сергиев Посад

**«Элементы теории графов.**

**Решение задач ЕГЭ»**

Методическая разработка

Учитель информатики

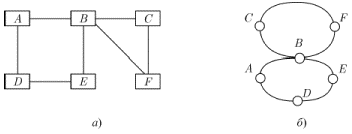
высшей квалификационной категории

Перлова Н.В.

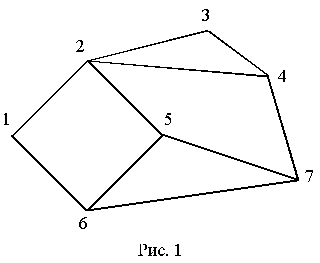
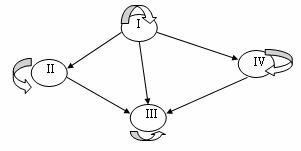
**2011 - 2012 учебный год**

Графы являются существенным элементом математических моделей в самых разнообразных областях науки и практики. Они помогают наглядно представить взаимоотношения между объектами или событиями в сложных системах. Многие алгоритмические задачи дискретной математики могут быть сформулированы как задачи, так или иначе связанные с графами, например задачи, в которых требуется выяснить какие-либо особенности устройства графа, или найти в графе часть, удовлетворяющую некоторым требованиям, или построить граф с заданными свойствами.

**Общие понятия теории графов**

Графом называется набор точек (эти точки называются вершинами), некоторые из которых объявляются смежными (или соседними). Считается, что смежные вершины соединены между собой ребрами (или дугами).

Таким образом, ребро определяется парой вершин. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Геометрически граф часто изображают точками плоскости, причем соседние вершины соединены дугами (для орграфа некоторые дуги имеют направление, что обычно отмечают стрелкой).

Помимо этого, в теории графов рассматриваются также мультиграфы – это такие графы, в которых могут быть петли (т. е. некоторая вершина соединена сама с собой ребром) или некоторые пары вершины могут быть соединены между собой несколькими ребрами.

Маршрут в графе – это последовательность соседних (смежных) вершин. Ясно, что можно определить маршрут и как последовательность смежных ребер (в этом случае ребра приобретают направление). Заметим, что в маршруте могут повторяться вершины, но не ребра. Маршрут называется циклом, если в нем первая вершина совпадает с последней.

Путь в графе (иногда говорят простой путь) – это маршрут без повторения вершин (а значит, и ребер).

Контур – это цикл без повторения вершин, за исключением первой вершины, совпадающей с последней.

Последовательности вершин (рис. 1): 1–2–3–4–2–5 не простой путь, а маршрут; последовательности 1–2–3–4–7–5 и 1–2–5 – простые пути; 1–2–3–4–2–5–6–1 –это цикл (но не контур); 1–2–5–6–1 – это контур.

Если имеется некоторый маршрут из вершины t в вершину s, заданный в виде последовательности ребер, которые в этом случае приобрели направление, и если в этот маршрут входит ребро, соединяющее вершины (i, j), то это ребро по отношению к вершине i называют иногда прямой дугой, а по отношению к вершине j – обратной дугой (или обратным ребром).

Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить маршрутом (или путем). На рис. 1 изображен связный граф.

Ребро, при удалении которого граф перестает быть связным, иногда называют мостом или перешейком.

Следующее определение имеет смысл только для графов или мультиграфов без петель (но не для орграфов).

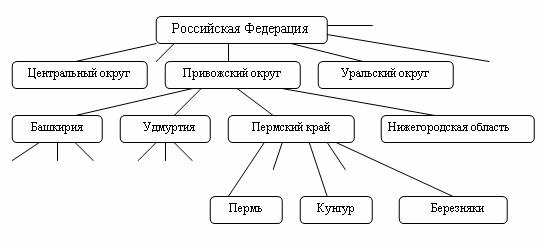
Степень вершины – это число ребер, входящих в эту вершину. Вершина называется висячей, если ее степень равна единице.

**Дерево – граф иерархической структуры.**

Весьма распространенным типом систем являются системы с иерархической структурой. Иерархическая структура естественным образом возникает, когда объекты или некоторые их свойства находятся в отношении соподчинения (вложения, наследования). Как правило иерархическую структуру имеют системы административного управления, между элементами которых установлены отношения подчиненности (директор завода – начальники цехов – начальники участков – бригадиры - рабочие).  Иерархическую структуру имеют также системы, между элементами которых существуют отношения вхождения одних в другие.

Граф иерархической структуры называется деревом. Основным свойством  дерева является то, что между любыми двумя его вершинами  существует единственный путь. Деревья не содержат циклов и петель.

Дерево административной структуры РФ



Посмотрите на граф, отражающий иерархическую административную структуру нашего государства: РФ делится на семь административных округов; округа делятся на регионы (области и национальные республики), в состав которых входят города и другие населенные пункты. Такой граф называется деревом.

У дерева существует одна главная вершина, которая называется корнем дерева. Эта вершина изображается вверху; от нее идут ветви дерева. От корня начинается отсчет уровней дерева. Вершины, непосредственно связанные с корнем, образуют первый уровень.  От них идут связи к вершинам второго уровня и т.д. Каждая вершина дерева (кроме корня) имеет одну исходную вершину на предыдущем уровне и может иметь множество порожденных вершин на следующем уровне. Такой принцип связи называется “один ко многим”. Вершины, которые не имеют порожденных, называются листьями (на нашем графе это вершины, обозначающие города).

**Решение задач ЕГЭ**

# B13

**Тема**: Анализ дерева решений.

**Что нужно знать**:

* уметь строить дерево решений
* уметь искать одинаковые числа в списке
* уметь считать разные числа в списке

### Пример задания:

*У исполнителя Калькулятор две команды:*

**1. прибавь 3,**

**2. вычти 2.**

*Первая из них увеличивает число на экране на 3, вторая – уменьшает его на 2 (отрицательные числа допускаются).*

*Программа для Калькулятора – это последовательность команд. Сколько различных чисел можно получить из числа 1 с помощью программы, которая содержит ровно 5 команд?*

**Решение (1 способ, построение полного графа решения):**

1. будем строить дерево решений следующим образом: выясним, какое число можно получить из начального значения 1 за 1 шаг:

1

**-2**

4

-1

**+3**

1. теперь посмотрим, что удается получить за 2 шага; учитывая, что (-2+3)=(+3-2), одно из значений повторяется: мы можем получить -1 + 3 = 2 и 4 – 2 = 2, то есть получается не дерево, а граф:

1

**-2**

4

-1

**+3**

2

7

-3

так с помощью программ, содержащих ровно 2 команды, можно получить 3 различных числа

1. строим еще уровень: программы из 3-х команд дают 4 разных числа:

1

**-2**

4

-1

**+3**

2

7

-3

0

5

10

-5

обратим внимание, что числа на каждом уровне отличаются друг от друга на 5 =(+3-(-2), то есть они не могут повторяться

1. четвертый уровень дает 5 различных чисел:

1

**-2**

4

-1

**+3**

2

7

-3

0

5

10

-5

13

8

3

-2

-7

1. и пятый – 6 решений:

1

**-2**

4

-1

**+3**

2

7

-3

0

5

10

-5

13

8

3

-2

-7

16

11

6

1

-4

-9

1. Ответ: 6.

# B9

**Тема**: Графы. Поиск путей

**Что нужно знать**:

* если в город R можно приехать только из городов X, Y, и Z, то число различных путей из города A в город R равно сумме числа различных путей проезда из A в X, из A в Y и из A в Z, то есть

,

где  обозначает число путей из вершины A в некоторую вершину Q

* число путей конечно, если в графе нет циклов – замкнутых путей

### Пример задания:

*На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?*

Г

В

А

К

Е

Б

Д

Ж

И

**Решение (1 вариант, подстановки):**

1. начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
2. будем обозначать через NX количество различных путей из города А в город X
3. общее число путей обозначим через N
4. по схеме видно, что NБ = NГ = 1
5. очевидно, что если в город X можно приехать только из Y, Z, то NX = NY + N­Z, то есть нужно сложить число путей, ведущих из A во все города, откуда можно приехать в город X
6. поскольку в K можно приехать из Е, Д, Ж или И, поэтому

N = N­К = NД + NЕ + NЖ + NИ

1. в город И можно приехать только из Д, поэтому NИ = NД
2. в город Ж можно приехать только из Е и В, поэтому

N­Ж = NЕ + NВ

1. подставляем результаты пп. 6 и 7 в формулу п. 5:

N = NВ + 2NЕ + 2NД

1. в город Д можно приехать только из Б и В, поэтому

N­Д = NБ + NВ

так что

N = 2NБ + 3NВ + 2NЕ

1. в город Е можно приехать только из Г, поэтому N­Е = NГ так что

N = 2NБ + 3NВ + 2NГ

1. по схеме видно, что NБ = NГ = 1, кроме того, NВ = 1 + N­Б + NГ = 3
2. окончательно N = 2NБ + 3NВ + 2NГ  = 2·1 + 3·3 + 2·1 = 13
3. Ответ: 13.

# A2

**Тема**: Использование информационных моделей (таблицы, диаграммы, графики).  
 Перебор вариантов, выбор лучшего по какому-то признаку.

**Что нужно знать**:

* в принципе, особых дополнительных знаний, кроме здравого смысла и умения перебирать варианты (не пропустив ни одного!) здесь, как правило, не требуется
* полезно знать, что такое *граф* (это набор вершин и соединяющих их ребер) и как он описывается в виде таблицы, хотя, как правило, все необходимые объяснения даны в формулировке задания
* чаще всего используется *взвешенный граф*, где с каждым ребром связано некоторое число (вес), оно может обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки
* рассмотрим граф (рисунок слева), в котором 5 вершин (A, B, C, D и E); он описывается таблицей, расположенной в центре; в ней, например, число 4 на пересечении строки В и столбца С означает, что, во-первых, есть ребро, соединяющее В и С, и во-вторых, вес этого ребра равен 4; пустая клетка на пересечении строки А и столбца В означает, что ребра из А в В нет

1

2

4

2

3

1

2

4

2

3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | Е |
| A |  |  | 3 | 1 |  |
| B |  |  | 4 |  | 2 |
| C | 3 | 4 |  |  | 2 |
| D | 1 |  |  |  |  |
| Е |  | 2 | 2 |  |  |

* обратите внимание, что граф по заданной таблице (она еще называется *весовой матрицей*) может быть нарисован по-разному; например, той же таблице соответствует граф, показанный на рисунке справа от нее
* в приведенном примере матрица симметрична относительно главной диагонали; это может означать, например, что стоимости перевозки из В в С и обратно равны (это не всегда так)
* желательно научиться быстро (и правильно) строить граф по весовой матрице и наоборот

### Пример задания:

*Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F |
| A |  | 2 | 4 |  |  |  |
| B | 2 |  | 1 |  | 7 |  |
| C | 4 | 1 |  | 3 | 4 |  |
| D |  |  | 3 |  | 3 |  |
| E |  | 7 | 4 | 3 |  | 2 |
| F |  |  |  |  | 2 |  |

*Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).*

1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

**Решение (вариант 1, использование схемы):**

1. построим граф – схему, соответствующую этой весовой матрице; из вершины А можно проехать в вершины B и C (длины путей соответственно 2 и 4):

A

B

C

2

4

1. для остальных вершин можно рассматривать только часть таблицы над главной диагональю, которая выделена серым цветом; все остальные рёбра уже были рассмотрены ранее
2. например, из вершины В можно проехать в вершины C и E (длины путей соответственно 1 и 7):

A

B

C

E

2

4

7

1

1. новые маршруты из С – в D и E (длины путей соответственно 3 и 4):

D

A

B

C

E

2

4

7

1

3

4

1. новый маршрут из D – в E (длина пути 3):

D

A

B

C

E

2

4

7

1

3

4

3

1. новый маршрут из E – в F (длина пути 2):

D

F

A

B

C

E

2

4

7

1

3

4

3

2

1. нужно проехать из А в F, по схеме видим, что в любой из таких маршрутов входит ребро EF длиной 2; таким образом, остается найти оптимальный маршрут из A в E
2. попробуем перечислить возможные маршруты из А в Е:

А – В – Е длина 9

А – В – С – Е длина 7

А – В – C – D – Е длина 9

А –C – Е длина 8

А –C – B – Е длина 12

А –C – D – Е длина 10

1. из перечисленных маршрутов кратчайший – A-B-C-E – имеет длину 7, таким образов общая длина кратчайшего маршрута A-B-C-E-F равна 7 + 2 = 9
2. таким образом, правильный ответ – 1.